Побудова стереографічних проекцій 32 видів симетрії

<u>Мета</u>

- Використовуючи правила знаходження елементів симетрії і теореми про їх сполучення побудувати стереографічні проекції елементів симетрії заданих багатогранників.
- Засвоїти методику запису формул симетрії та міжнародну систему позначень.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Основні елементи симетрії:

Площина симетрії – це площина, яка ділить фігуру на дві частини, розміщені як предмет і його дзеркальне відображення.

Вісь симетрії – це пряма, при повороті навколо якої на певний кут фігура суміщається сама з собою. Порядок осі симетрії показує скільки разів фігура суміщається сама з собою при її повному обороті навколо цієї осі

Центр симетрії (центр інверсії) – особлива точка всередині фігури, яка характеризується тим, що довільна пряма проведена через неї зустрічає однакові точки фігури по обидва боки від центру на однакових відстанях.

Інверсійна вісь симетрії являє собою об'єднану дію осі обертання та відображення (інверсію) в центрі симетрії

Для позначення симетричних перетворень і відповідних їм елементів симетрії в кристалографії використовують умовні символи. Найбільш поширеними є дві системи позначень: міжнародна символіка і символіка, заснована на формулах симетрії (табл.1).

На рис.1 наведено всі 9 площин симетрії куба та їх стереографічні проекції

На рис.2 наведено деякі з осей симетрії куба та їх стереографічні проекції. В куба існує три осі 4-го порядку, які проходять через центри протилежних граней, чотири осі 3-го порядку, які є просторовими діагоналями куба і шість осей 2-го порядку, що проходять через середини пар протилежних ребер.

Правила знаходження елементів симетрії:

Площини симетрії можуть проходити лише через середини граней и ребер багатогранника перпендикулярно до них або розміщуватись вздовж ребер, утворюючи рівні кути з однаковими гранями і ребрами.

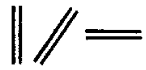
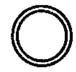
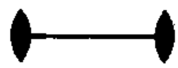
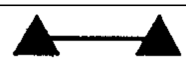
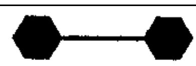
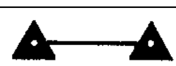
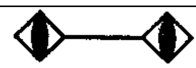
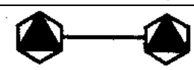
Осі симетрії проходять через центри граней перпендикулярно граням або через вершини багатогранників. Симетрія грані повинна відповідати порядку перпендикулярної осі, наприклад, вісь 3-го порядку не може бути перпендикулярною до квадратної грані. Число граней, які сходяться у вершині кута грані, повинне відповідати порядку осі. Осі симетрії 2-го порядку можуть виходити із середини ребра.

Щоб знайти *центр симетрії*, необхідно покласти багатогранник на стіл почергово кожною гранню і перевірити чи є зверху грань, розміщена горизонтально. Обидві грані повинні бути не тільки паралельним а і антипаралельними (однаковими і обернено розміщеними).

Інверсійні осі слід шукати лише після того, як знайдено прості осі, площини та центр симетрії (або перевірено що їх нема)

Таблиця 1

Позначення елементів симетрії

Назва	**Позначення**		**Зображення по відношенню до площини малюнка**	
	міжнар.	*за формулою симетрії*	*перпенди-кулярне*	*паралельне*
Площина симетрії	m	P		
Центр симетрії	$\bar{1}$	C	**C** • ○	
Поворотна вісь симетрії	n	L_n		
2-го порядку	2	L_2		
3-го порядку	3	L_3		
4-го порядку	4	L_4		
6-го порядку	6	L_6		
Інверсійна вісь симетрії	$\bar{n}$	$L_n = L_{ni}$		
3-го порядку	$\bar{3}$	$L_3 = L_{3i}$		
4-го порядку	$\bar{4}$	$L_4 = L_{4i}$		
6-го порядку	$\bar{6}$	$L_6 = L_{6i}$		

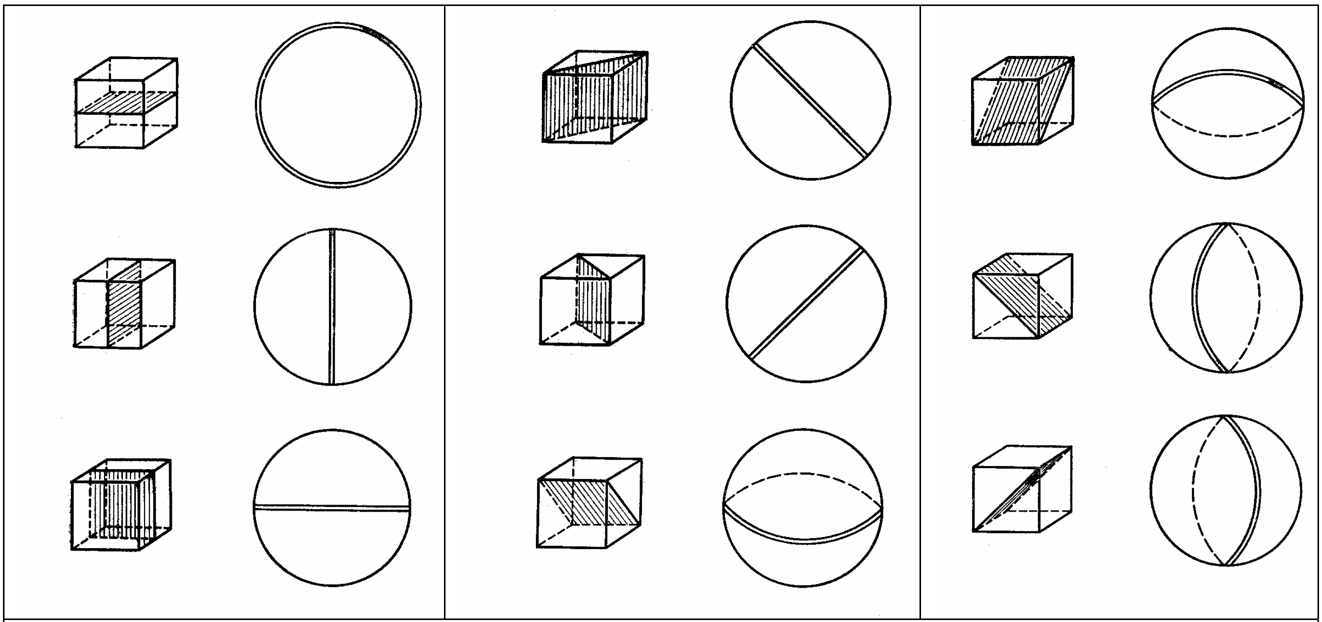


Рис.1 Площини симетрії куба та їх стереографічні проекції

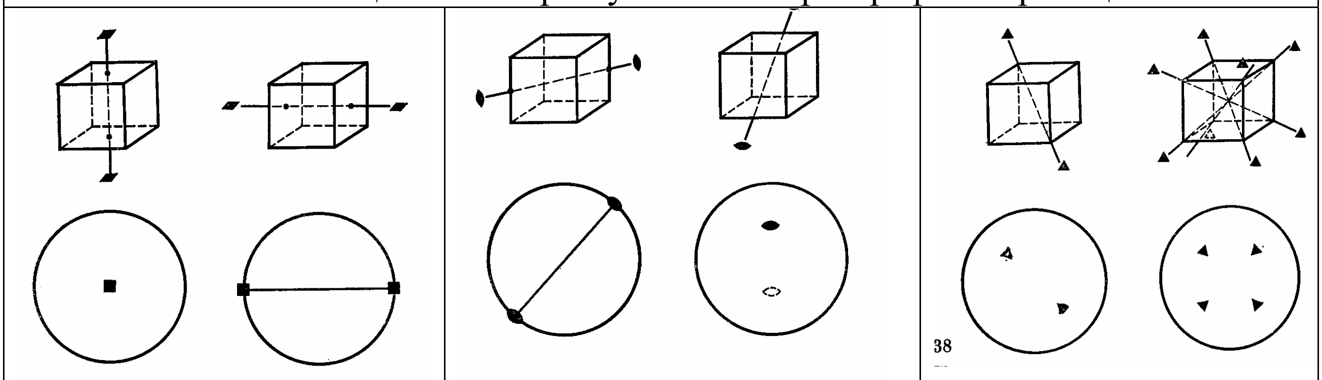


Рис.2 Деякі з осей симетрії куба та їх стереографічні проекції

Теореми про сполучення елементів симетрії

Теорема 1. Лінія перетинання двох площин симетрії є віссю симетрії, причому кут повороту навколо цієї осі в два раз більший за кут між площинами.

Теорема 1а. Поворот навколо осі симетрії на кут *a* еквівалентний відбиванню в двох площинах симетрії, які проходять вздовж осі. Кут між площинами рівний *a/2,* причому відлік кута повороту проводиться в напрямку повороту.

Теорема 2. Точка пересікання парної осі симетрії з перпендикулярною їй площиною симетрії є центром симетрії.

Теорема 2а. Якщо існує парна вісь симетрії і на ній центр симетрії, то перпендикулярно до цієї осі проходить площина симетрії.

Теорема 2б. Якщо існує центр симетрії і через нього проходить площина симетрії, то перпендикулярно до цієї площини через центр симетрії проходить парна вісь симетрії.

Теорема 3. Якщо існує вісь симетрії порядку n і перпендикулярно до неї вісь 2-го порядку, то завжди є n осей 2-го порядку, перпендикулярних осі n-го порядку.

Теорема 4. Якщо існує вісь симетрії *n*-го порядку і вздовж неї проходить площина симетрії, то таких площин є *n*.

Теорема 5. Рівнодійною двох осей симетрії, що пересікаються є третя вісь, яка проходить через точку їх перетину.

Теорема 6. Площина, яка проходить вздовж парної інверсійної осі симетрії, приводить до появи осі 2-го порядку, перпендикулярної інверсійної осі, яка проходить по бісектрисі кута між площинами.

Категорії кристалів:

В кристалах *вищої категорії* немає одиничних напрямків. В них існує лише декілька осей порядку вище 2-го, а саме чотири осі 3-го порядку, розміщені як просторові діагоналі куба. Це високосиметричні кристали. Довільному напрямку в кристалі вищої категорії відповідають інші симетрично еквівалентні напрямки.

До *середньої категорії* відносяться кристали, в яких існує один особливий напрямок, а саме: одна вісь симетрії порядку вище ніж 2 (вісь симетрії 3, 4 або 6-го порядку, просторова або інверсійна).

До *нижчої категорії* відносяться кристали, в яких немає осей симетрії порядку вище ніж 2, а одиничних напрямків декілька.

Сингонії кристалів:

Класифікація кристалів за сингоніями визначається вибором кристалографічної системи координат або елементарної комірки (табл.2). На рис.3 наведено форми примітивних елементарних комірок, які відповідають 7 сингоніям.

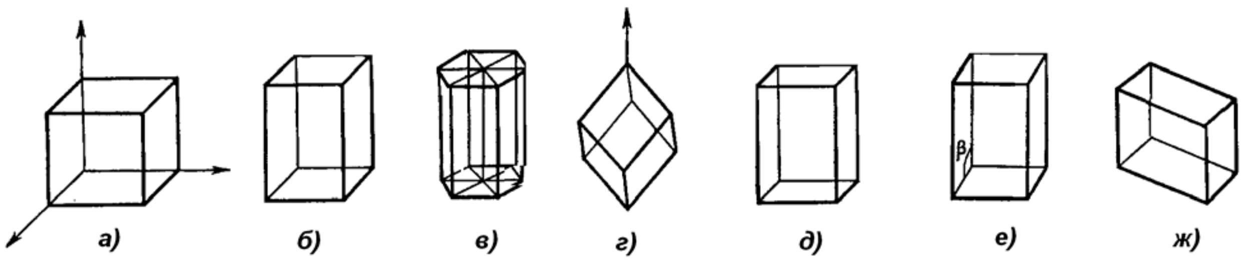


Рис.3 Форми примітивних комірок семи сингоній
а – кубічна, б – тетрагональна, в – гексагональна, г – ромбоедрична, д – ромбічна, е – моноклінна, ж – триклінна

Таблиця 2

Кристалографічні категорії та сингонії

Катюго-рія	**Характеристики**						
	Кільк. одинич напрям-ків	**Сингонія**	**Осі корди-нат**	**Харак-терна симетрія**	**Розмі-щення осей**	**Форма елемен-тарної комірки**	**Харак-терні парамет-ри речо-вини**
Нижча	Декілька	Трик-лінна	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq$ $\neq \gamma \neq 90$	Вісь *1* або $\bar{1}$	По ребрах кристалу	Косокут-ний паралеле-піпед	a, b, c α, β, γ
		Моно-клінна	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma =$ $= 90 \neq \beta$	Вісь *2* або площина *m*	Вісь Y □ *2* або $\perp$ *m*	Пряма призма (в основі – паралеле-грам	a, b, c, β
		Ромбічна	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma = 90$	Три осі *2* або три площини *m*	Осі XYZ □ *2* або $\perp$ *m*	Прямо-кутний паралеле-піпед	a, b, c
Середня	Один	Триго-нальна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90$ $\gamma = 120$	Вісь *3* або $\bar{3}$	Головна вісь вздовж Z, інші в площині XY	Призма (в її основі – ромб з кутом 120)	c / a
		Гекса-гональна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90$ $\gamma = 120$	Вісь *6* або $\bar{6}$	Головна вісь вздовж Z, інші в площині XY		c / a
		Тетра-гональна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma = 90$	Вісь *4* або $\bar{4}$	Головна вісь вздовж Z, інші в площині XY	Призма з квадрат-ною основою	c / a
Вища	Немає	Кубічна	$a = b = c$ $\alpha = \beta =$ $= \gamma = 90$	Чотири осі *3*	Осі XYZ □ трьом взаємно $\perp$ осям *4* або $\bar{4}$ або *2*	Куб	a

Класи симетрії:

Класом або видом симетрії певного об'єкту називається повна сукупність елементів симетрії даного об'єкту. Існує 32 класи симетрії, які описують усі можливі форми кристалічних багатогранників.

Примітивні класи симетрії. Існує лише одна вісь симетрії n-го порядку вздовж одиничного напрямку, причому ця вісь полярна.

Центральні класи симетрії. До одиничної осі додається центр симетрії. При цьому вісь залишається єдиною, але ні вона ні жоден інший напрямок в кристалі вже не може бути полярним.

Планарні класи симетрії. Вздовж породжуючої осі симетрії проводиться площина симетрії. За теор.4 таких площин буде n.

Аксіальні класи симетрії можна одержати, якщо додати вісь 2-го порядку перпендикулярно до єдиної осі симетрії. За теор.3 таких осей буде n.

Планаксіальні класи симетрії одержуються, якщо до породжуючої осі симетрії n-го порядку додати центри симетрії, паралельні площині симетрії і перпендикулярні осі 2-го порядку. При цьому для парних осей зявляються ще і поперечні площини m.

Інверсійно-примітивні класи симетрії.

Інверсійно-планарні класи симетрії.

Формула симетрії:

Складається із записаних підряд всіх елементів симетрії. На першому місці прийнято писати осі симетрії від вищих до нижчих, на другому – площини симетрії, а потім центр. Так наприклад формула куба: $3L_4 4L_3 6L_2 9PC$ (3 осі 4-го порядку, 4 осі 3-го порядку, 6 осей 2-го порядку, 9 площин, 1 центр симетрії). В такій формі запису пераховано усі елементи симетрії, але для розшифровки структури необхідно встановити їх взаємне розміщення. Для цього використовуються відповідні теореми.

Міжнародні символи:

Міжнародні символи класів симетрії значно компактніші та інформативніші. За написанням символу можна встановити взаємне розміщення елементів симетрії. В міжнародному символі даного класу пишуться лише основні (породжуючі) елементи симетрії, а елементи, які можна вивести з відповідних теорем не записуються. В якості породжуючих елементів симетрії переважно вибираються площини.

При записі або читанні міжнародного символу дуже важливим є порядок запису чисел і букв. Зміст кожної цифри і букви, які позначають елемент симетрії, залежить від того, на якій позиції вони знаходяться.

n	– вісь симетрії n-го порядку
$\bar{n}$	– інверсійна вісь симетрії n-го порядку
m	– площина симетрії
nm	– вісь симетрії n-го порядку і n площин симетрії, які проходять вздовж неї

$\frac{n}{m}; n/m$ – вісь симетрії n-го порядку і перпендикулярна їй площина симетрії

$n2$ – вісь симетрії n-го порядку і n осей 2-го порядку перпендикулярних їй

$\frac{n}{m}m; n/mm$ – вісь симетрії n-го порядку і площини m, паралельні та перпендикулярні їй.

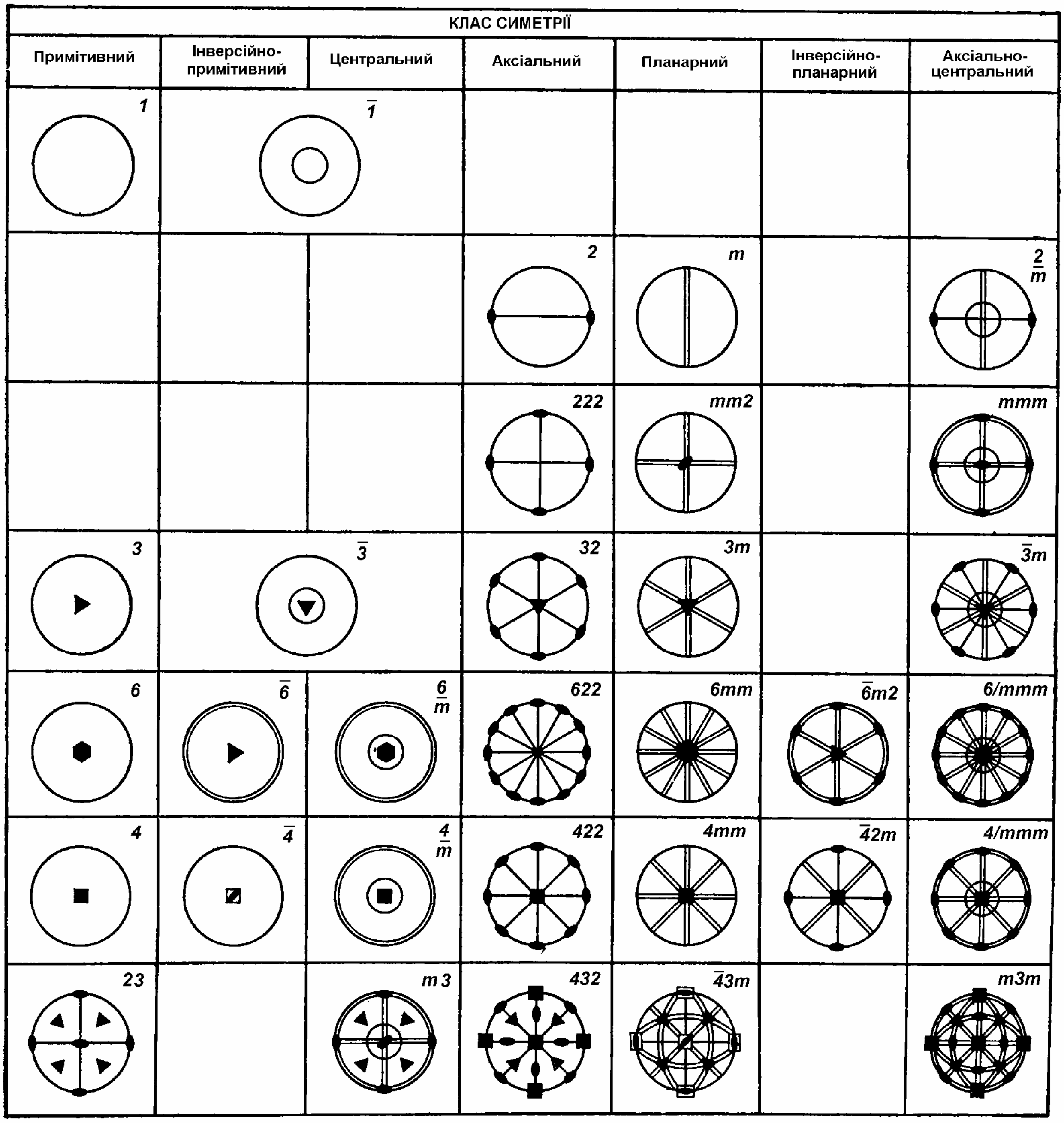
Таблиця 4

32 види симетрії кристалів

Категорії	**Сингонії**	**Вид симетрії** Примітивний	 Інверсійно-примітивний	 Центральний	 Аксіальний	 Планальний	 Інверсійно-планальний	 Аксіально-центраний
Нижча	Триклинна	1 –	$\bar{1}$ C					
	Моноклинна				2 L_2	m P		$\frac{2}{m}$ L_2PC
	Ромбічна				222 $3L_2$	$mm2$ L_22P		mmm $3L_23PC$
Середня	Тригональна	3 L_3	$\bar{3}$ L_3C		32 L_33L_2	$3m$ L_33P		$\bar{3}m$ L_33L_23PC
	Тетрагональна	6 L_4	$\bar{6}$ $L_{i4} = L_2$	$\frac{6}{m}$ L_4PC	622 L_44L_2	$6mm$ L_44P	$\bar{6}m2$ $L_{i4}2L_22P =$ $= L_22L_22P$	$6/mmm$ L_44L_25PC
	Гексагональна	4 L_6	$\bar{4}$ $L_{i6} = L_3P$	$\frac{4}{m}$ L_6PC	422 L_66L_2	$4mm$ L_66P	$\bar{4}2m$ $L_{i6}3L_23P =$ $= L_33L_24P$	$4/mmm$ L_66L_27PC
Вища	Кубічна	23 $4L_33L_2$		$m3$ $4L_33L_23PC$	432 $3L_44L_36L_2$	$\bar{4}3m$ $4L_33L_{i4}6P =$ $= 4L_33L_26P$		$m3m$ $3L_44L_36L_2$ $9PC$

Таблиця 5

Стереографічні проекції елементів симетрії 32 класів



Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Шаскольская М.П. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1976, 391 с.